EPFL

X

Enseignant : Mathieu Huruguen
Algèbre Linéaire - CMS
11 avril 2025
Durée : 105 minutes

Contrôle 3 (Enoncé)

SCIPER : **XXXXXX**

Signature

☐ Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table, **vérifiez** votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page et apposez votre **signature**.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Question 1 (1 point) Combien vaut le déterminant de A ?

- ☐ -4
- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ -2
- ☐ -1

Question 2 (2 points) Quel est le coefficient sur la troisième ligne et la deuxième colonne de la matrice A^{-1} ?

- ☐ 11
- ☐ -1
- ☐ $-\frac{5}{2}$
- ☐ 3
- ☐ 1
- ☐ $\frac{11}{2}$
- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☐ -3

Question 3 (1 point) Quel est le coefficient sur la première ligne et la première colonne de la matrice $A^2 - 6A$?

- ☐ 7
- ☐ 1
- ☐ 11
- ☐ -1
- ☐ 36
- ☐ -3
- ☐ 5
- ☐ 4

Pour les **Questions 4, 5 et 6** on donne deux bases de $\mathbb{R}^3$ de la forme suivante :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = \frac{1}{3}v_2, -v_3, v_1 + 2v_3$$

ainsi qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Question 4 (2 points) Quel est le coefficient sur la troisième ligne et la première colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$?

- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ -1
- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ -3
- ☐ $-\frac{3}{2}$
- ☐ -2
- ☐ 1

Question 5 (2 points) Quel est le coefficient sur la première ligne et la troisième colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$?

- ☐ 3
- ☐ $\frac{2}{9}$
- ☐ 2
- ☐ -1
- ☐ 4
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ 0
- ☐ -2

Question 6 (2 points) On suppose que $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Parmi les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$, lequel appartient à $\operatorname{Ker} f$?

- ☐ $(3, 1, -1)$
- ☐ $(-9, 3, 1)$
- ☐ $(1, 3, -1)$
- ☐ $(-1, 9, 3)$
- ☐ $(9, 1, 1)$
- ☐ $(1, 3, 1)$
- ☐ $(1, -3, 9)$
- ☐ $(9, 3, 1)$

Deuxième partie, 1 question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Dans cette question, on ne demande que les réponses finales, sans développement. Aucune justification ne sera prise en compte.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer **un exemple** de base :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$$

de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la propriété donnée. Les sous-questions (a), (b), (c) sont **indépendantes**.

(a) Le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_3)$ a pour équation $2x + 3y - 4z = 0$.

$\mathcal{B} =$ ☐

(b) Le vecteur $(3, 1, 7)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B} =$ ☐

(c) On a ($\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$) :

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B} =$ ☐

Question 8: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5 ☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7 ☐.5 ☐8 ☐.5 ☐9

On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ décrite par :

$$f(x, y, z) = ((\alpha - 6)x + 2y + (2\alpha - 2)z, 3x - y + z, (\alpha^2 - 9)x + 3y + (2\alpha^2 - 3)z)$$

On rappelle que les réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

(a) Calculer le déterminant de f, en fonction de la valeur du paramètre α.

(b) En discutant selon la valeur de α, déterminer le rang de f.

(c) Déterminer une (ou des) équation(s) de $\mathrm{Im}\, f$. On discutera selon la valeur de α.

(d) Décrire précisément, en fonction de α, l'ensemble :

$$f^{-1}(\{(4 - \alpha, -2 + 3\alpha, 6 + \alpha)\}) .$$

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (3x + y + 5z, x - 3y + 5z, x - y + 3z)$$

dont on note A la matrice en base canonique.

(a) Déterminer le rang de f.

(b) Trouver une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\operatorname{rg} g = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Vect}((0, 5, 2))\,.$$